HAL open science

Solution des problèmes antérieurs : problème 486-2 (Question de Michel Lafond)

Jean-Louis Nicolas

▶ To cite this version:

Jean-Louis Nicolas. Solution des problèmes antérieurs : problème 486-2 (Question de Michel Lafond). Le Bulletin Vert, 2011, 493, pp.241-243. hal-00957608

HAL Id: hal-00957608
https://hal.science/hal-00957608

Submitted on 10 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 486-2 (Question de Michel Lafond)

On appelle nombre d'Einstein un entier au moins égal à 2 dont la décomposition en facteurs premiers est mc^2 où m et c sont des nombres premiers distincts. Ainsi, $7\,442 = 2 \times 61^2, 7\,443 = 3^2 \times 827, 7\,444 = 2^2 \times 1\,861$ sont trois nombres d'Einstein consécutifs. Combien existe-t-il au plus de nombres d'Einstein consécutifs ?

Solution de Jean-Louis Nicolas (Institut Camille Jordan, UMR 5208, Université Claude Bernard (Lyon 1))

On écrit d'abord un test informatique pour reconnaître les nombres d'Einstein. Voici par exemple une procédure en *Maple* :

```
test := proc(n)
local lis, bou ;
lis := op(2, ifactors(n)) ;
if nops(lis) <> 2 then bou := false
else bou := evalb(lis[1][2]+lis[2][2] = 3) end if
bou ;
end proc ;
```

La procédure suivante recherche les doublets (ou les triplets, les quadruplets, en réglant le pas) compris dans l'intervalle [[*nmin*, *nmax*]] par une méthode naïve.

```
testcom := proc(nmin, nmax, pas)
local n, bou, com, lis, lisf, m ;
com :=0 ;
for n from nmin to nmax do
bou := test(n) ;
if bou then com := com + 1 else com := 0 end if ;
if com => pas then lis := [ ] ;
for m from n – com + 1 to n do lis := [op(lis), m] end do ;
lisf :=map(u -> ifactor(u), lis) ;
print(lis, lisf) ;
end if ;
end do ;
end proc ;
```

En appliquant ce test, on trouve que le plus petit nombre d'Einstein est 12, le plus petit doublet est $(44 = 2^2 \times 11, 45 = 3^2 \times 5)$, le premier triplet est

$$(603 = 3^2 \times 67, 604 = 2^2 \times 151, 605 = 5 \times 11^2).$$

On observe alors qu'un nombre d'Einstein qui est multiple de 6 ne peut être que 12 ou 18, puisqu'il admet deux et uniquement deux facteurs premiers, à savoir 2 et 3. Il s'ensuit qu'une suite de nombres d'Einstein consécutifs comporte au plus cinq nombres. Nous allons donner des exemples de quadruplets et de quintuplets(1) et déterminer les premiers d'entre eux.

1. À la recherche de quadruplets et de quintuplets

Dans une suite de quatre nombres entiers consécutifs, l'un d'entre eux est multiple de 4 et un autre est pair, mais non multiple de 4. Un quadruplet de nombres d'Einstein comprend donc un nombre de la forme $2q^2$ et un autre égal à $4p$ où p et q sont des nombres premiers différents de 2 et 3.
Le carré d'un nombre impair non multiple de 3 est congru à 1 modulo 12, donc $2q^2$ est congru à 2 modulo 6 et $4p$ ne peut être égal à $2q^2 - 2$ (sinon, il serait multiple de 6, ce qui est interdit). On a donc

$$4p = 2q^2 + 2.$$

Le nombre $2q^2 + 1$ est multiple de 3. Il peut être de deux formes : $9r$ ou $3s^2$ avec r et s premiers. On distinguera deux types de quadruplets suivant ces deux cas.

1.1. Les quadruplets de type (1) : $2q^2 + 1 = 9r$

La conguence $2q^2 + 1 \equiv 0 \pmod 9$ a pour solution $q \equiv \pm 2 \pmod 9$ et l'imparité de q impose $q \equiv \pm 7 \pmod{18}$. Pour rechercher les quadruplets de type (1), on considère donc les nombres premiers q dans les deux progressions arithmétiques $q \equiv 7 \pmod{18}$ et $q \equiv 11 \pmod{18}$; pour chacune d'entre elles, on teste si $(2q^2 + 1)/9$ et $(2q^2 + 2)/4$ sont premiers. Si oui, on regarde les deux nombres $2q^2 - 1$ et $2q^2 + 3$; si l'un des deux est un nombre d'Einstein, on a un quadruplet ; si les deux sont des nombres d'Einstein c'est un quintuplet.
La procédure suivante effectue ce travail :

```
testcar := proc(qmin,qmax,pas)
local q, n, qq, k, com, sig ;
for qq from qmin by 18 to qmax do
for k in [7,11] do
q := qq+k ;
if isprime(q) then n := 2*q^2 ;
if (isprime((n+1)/9) and isprime((n+2)/4)) then com :=3 ;
if test(n–1) then com := com+1 ; sig :='moins' ; end if ;
if test(n+3) then com := com +1 ; sig :='plus' ; end if ;
if com >= pas then print('com =', com, n, sig) ; end if ;
end if
end if
end do ;
end do ;
end proc ;
```

Le plus petit quadruplet de type (1), obtenu pour $q = 92\,311$, est

$$(n = 2q^2 - 1 = 17\,042\,641\,441, n + 1, n + 2, n + 3),$$

et l'entier n est multiple de 7^2.

(1) néologisme.

Pour $q = 71\,040\,881$, on obtient le plus petit quintuplet de type (1),

$$(n = 2q^2 - 1 = 10\,093\,613\,546\,512\,321,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4),$$

l'entier n est multiple de 7^2 et l'entier $n+4$ est multiple de 5^2.

1.2. Les quadruplets de type 2 : $2q^2 + 1 = 3s^2$

Les solutions positives de l'équation diophantienne $3x^2 - 2y^2 = 1$ sont les couples (x_k, y_k) définis pour $k \in \mathbb{N}$ par la relation

$$\left(2+\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^k = 2y_k + x_k\sqrt{6}.$$

Ils sont aussi définis par la condition initiale ($x_0 = y_0 = 1$) et la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{k+1} = 5x_k + 4y_k \\ y_{k+1} = 5y_k + 6x_k. \end{cases}$$

Les premières valeurs sont :

$k =$	0	1	2	3	4	5
$x_k =$	1	9	89	881	8 721	86 329
$y_k =$	1	11	109	1 079	10 681	105 731

Ce résultat découle de la méthode de résolution des équations de Pell-Fermat, mais on peut le prouver simplement. On commence par résoudre l'équation pour $y = 1, 2, 3$; la seule solution est $x = x_0 = 1$, $y = y_0 = 1$.

Soit maintenant une solution (x, y) avec $x > 0$ et $y \geq 4$. On définit x' et y' par la relation

$$\left(2y + x\sqrt{6}\right)\left(5 - 2\sqrt{6}\right) = 2y' + x'\sqrt{6}$$

ou encore

$$\left(2y' + x'\sqrt{6}\right)\left(5 + 2\sqrt{6}\right) = 2y + x\sqrt{6}.$$

On a ainsi

$$\begin{cases} x' = 5x - 4y \\ y' = 5y - 6x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 5x' + 4y' \\ y = 5y' + 6x'. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que (x', y') est une solution. En utilisant les relations

$$(5x - 4y)(5x + 4y) = 25x^2 - 16y^2 = 25x^2 - 8(3x^2 - 1) = x^2 + 8 > 0$$

et

$$(5y - 6x)(5y + 6x) = 25y^2 - 36x^2 = 25y^2 - 12(1 + 2y^2) = y^2 - 12 > 0,$$

on voit que $x' > 0$ et $y' > 0$. On a ensuite

$$y - y' = 6x - 4y > 5x - 4y = x' > 0$$

et donc $0 < y' < y$.

En itérant la transformation $(x, y) \mapsto (x', y')$ on arrive à une solution $(\hat{x}, \hat{y})$ vérifiant $0 < \hat{y} < 4$, donc $\hat{x} = \hat{y} = 1$, et la solution initiale, (x, y), vérifie $(x = x_k, y = y_k)$ où k est le nombre d'itérations.

Pour obtenir un quadruplet de type (2), on doit partir d'une solution (x, y) de l'équation $3x^2 - 2y^2 = 1$ avec x et y premiers. À part $(x_2, y_2) = (89, 109)$, il n'y a pas d'autres solutions premières avec moins de mille chiffres décimaux. La solution (x_2, y_2) conduit au doublet (23 762, 23 763) ; comme 23 761 est premier et $23\,764 = 2^2 \times 13 \times 457$, ce doublet ne se prolonge pas. Il n'y a donc aucun quadruplet de type (2) formé de nombres d'Einstein de moins de deux mille chiffres.

2. À la recherche de nombreux quintuplets

La méthode exposée au paragraphe 1.1 pour trouver le plus petit quintuplet nécessite des calculs assez longs. Si l'on veut trouver une grande quantité de quintuplets (mais pas forcément les plus petits), on peut l'accélérer en imposant (par exemple) au nombre premier q les conditions

$$2q^2 - 1 \text{ est multiple de } 49$$

et

$$2q^2 + 3 \text{ est multiple de } 25.$$

Cela revient à chercher q dans les progressions arithmétiques de raison

$$22\,050 = 2 \times (3 \times 5 \times 7)^2$$

et de premier terme l'un des nombres

$$1\,181,\ 3\,719,\ 4\,219,\ 9\,119,\ 12\,931,\ 17\,831,\ 18\,331,\ 20\,869.$$

On pourrait augmenter les chances d'obtenir un quintuplet en imposant que $2q^2 + 1$ ne soit pas multiple de 27, que $2q^2 + 2$ ne soit pas multiple de 8, que $2q^2 - 1$ ne soit pas multiple de 7^3 et que $2q^2 + 3$ ne soit pas multiple de 5^3.

En explorant les 35 751 048 nombres inférieurs à 10^{11} dans ces huit progressions arithmétiques modulo 22 050, on trouve 241 quintuplets, soit un rendement d'environ 1/150 000. Cela correspond à ce que prévoient les probabilités.

En effet, un nombre au hasard de taille t a une probabilité de $1/\ln(t)$ d'être premier. Si le nombre est impair, cette probabilité double ; si le nombre est impair et non multiple de 3, elle triple. Si l'on sait que ce nombre est non multiple de p premier, elle est multipliée par $p/(p-1)$.

Dans notre algorithme, nous recherchons cinq nombres premiers parmi des nombres qui ne sont pas divisibles par certains des nombres 2, 3, 5, 7, ce qui augmente leurs chances d'être premier. Un calcul grossier justifie le rendement de notre algorithme.

Vraisemblablement, il existe une infinité de quintuplets, mais il semble impossible, pour le moment, de démontrer qu'il existe même une infinité de doublets : on ne sait pas prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, ni qu'il existe une infinité de nombre premiers p tels que $p - 1$ soit un carré.

Me sont parvenues deux autres solutions correctes : Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint George d'Orques).

Problème 487.1 (Srinivasa Ramanujan)

Pour $x \geq 1$, simplifier

$$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + (x+3)\sqrt{1 + \ldots}}}}},$$

après avoir montré que cette expression avait un sens.

Solutions de Jean-Claude Carréga (Lyon), Laurent Chéno (Lycée Dorian, Paris 11e), Franck Gautier (Pérignat lès Sarliève), Michel Lafond (Dijon), Jean Lefort (Wintzenheim), Paul Mercat (Paris), Moubinool Omarjee (Lycée Jean Lurçat, Paris), Joël Payen (Gagny), Pierre Renfer (Saint-George d'Orques).

Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon). Voici sans doute la solution la plus rapide.

Pour tout $x \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(x+k)^2-1=(x+k-1)(x+k+1),$$

donc

$$x+k=\sqrt{1+(x+k-1)(x+k+1)}.$$

Cette formule peut être itérée. On peut en effet appliquer cette formule au facteur $(x + k + 1)$ situé sous le radical, en remplaçant k par $k + 1$. Cela donne

$$x+k=\sqrt{1+(x+k-1)\sqrt{1+(x+k)(x+k+2)}}.$$

L'opération peut se poursuivre avec le facteur $(x + k + 2)$.

En partant de $x + 1$, on obtient ainsi successivement

$$x+1=\sqrt{1+x(x+2)},$$

puis

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)(x+3)}},$$

puis

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)(x+4)}}},$$

puis

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}}.$$

Le processus peut en fait se poursuivre indéfiniment et on l'indique par des points de suspension :

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)\sqrt{1+\ldots}}}}}.$$

Solution abordable en terminale

Pour $x \geq 1$, on note

$$f_1(x)=\sqrt{1+x}$$

et l'on définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_{n+1}(x)=\sqrt{1+x\,f_n(x+1)}. \qquad (1)$$

On commence par montrer que pour $x \geq 1$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Facilement, pour $x \geq 1$,

$$x \leq x\sqrt{1+(x+1)}$$

et en ajoutant 1 puis en prenant la racine, on obtient

$$f_1(x) \leq f_2(x).$$

Si, à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, il est établi $f_{n-1} \leq f_n$, alors pour $x \geq 1$,

$$f_{n-1}(x+1) \leq f_n(x+1),$$

puis

$$f_n(x)=\sqrt{1+x\,f_{n-1}(x+1)} \leq \sqrt{1+x\,f_n(x+1)}=f_{n+1}(x).$$

Pour établir la convergence de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit de la majorer. Là encore, une récurrence permet de montrer que pour $x \geq 1$,

$$f_n(x) \leq 1+x.$$

Pour cela, on note

$$g(x) = 1 + x$$

et l'on remarque que

$$g(x)=\sqrt{1+xg(x+1)} \qquad (x \geq 1). \qquad (2)$$

Facilement, pour $x \geq 1$,

$$f_1(x)=\sqrt{1+x} \leq 1+x=g(x).$$

Si, à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n-1} \leq g$, alors, pour $x \geq 1$,

$$f_n(x)=\sqrt{1+x\,f_{n-1}(x+1)} \leq \sqrt{1+x\,g(x+1)}=g(x).$$

On peut définir alors

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}(f_n(x)) \qquad (x \geq 1)$$

En passant à la limite dans la relation (1), on obtient

$$f(x)=\sqrt{1+x\,f(x+1)} \qquad (x \geq 1) \qquad (3)$$

On fixe désormais $x \geq 1$ et l'on calcule $g(x) - f(x)$. Puisque la suite $(f_n(x))$ converge en croissant vers $f(x)$ et est majorée par $g(x)$,

$$0 \leq g(x)-f(x) \underset{(2,3)}{=} \frac{x\big(g(x+1)-f(x+1)\big)}{g(x)+f(x)}.$$

Si l'on montre par exemple que pour $x \geq 1$, $f(x) \geq x$, on aura alors

$$0 \leq g(x)-f(x)=\frac{x}{2x+1}\big(g(x+1)-f(x+1)\big) \leq \frac{1}{2}\big(g(x+1)-f(x+1)\big),$$

puis, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq g(x)-f(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \big(g(x+k)-f(x+k)\big). \qquad (4)$$

Comme on disposera de l'encadrement

$$0 \leq g-f \leq 1,$$

on aura, en faisant tendre k vers $+\infty$ dans (4), $g = f$, soit encore